

Berechnungen mit der Abbildungsgleichung

Im Koordinatensystem können mit der Abbildungsgleichung der zentrischen Streckung in der Form

$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$ bzw. $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ die Koordinaten von Bildpunkten, Ursprung oder Zentren oder der Streckungsfaktor k berechnet werden.

Beispiele für $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$:

- 1) Berechne die Koordinaten des Bildpunkts P' zum Ursprung $P(5/3)$ für eine zentrische Streckung mit $Z(1/2)$ und $k = 2$:

$$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' - 1 = 2 \cdot 4 \\ \wedge y' - 2 = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 9 \\ \wedge y' = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow P'(9/4)$$

- 2) Berechne die Koordinaten des Ursprungs P zum Bildpunkt $P'(4/2)$ für eine zentrische Streckung mit $Z(-2/5)$ und $k = -3$:

$$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 5 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6 = -3x - 6 \\ \wedge -3 = -3y + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 = -3x \\ \wedge -18 = -3y \end{cases}$$

$$\rightarrow P(-4/6)$$

- 3) Berechne die Koordinaten des Zentrums Z einer zentrischen Streckung mit $k = \frac{2}{3}$, dem Ursprung $P(-3/-1)$ und dem Bildpunkt $P'(1/1)$:

$$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - x_Z \\ 1 - y_Z \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 - x_Z \\ -1 - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - x_Z = -2 - \frac{2}{3}x_Z \\ \wedge 1 - y_Z = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y_Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_Z = -3 \\ \wedge -\frac{1}{3}y_Z = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_Z = 9 \\ \wedge y_Z = 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow Z(9/5)$$

- 4) Berechne den Streckungsfaktor k einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z(1/-1)$, dem Ursprung $P(4/3)$ und dem Bildpunkt $P'(5,5/5)$:

$$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} 5,5 - 1 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4,5 = k \cdot 3 \\ \wedge 6 = k \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1,5 \\ \wedge k = 1,5 \end{cases}$$

$$\rightarrow k = 1,5$$

Da hier zwei Gleichungen für die eine Unbekannte k entstehen, könnte auch noch eine fehlende Koordinate, z. B. für $P(4/y)$, berechnet werden!

Beispiel für $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$:

Berechne die Koordinaten des Zentrums Z und den Streckungsfaktor k für eine zentrische Streckung mit den Ursprüngen A(0/2) und B(2/1) und den Bildpunkten A'(12/5) und B'(8/7)

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} 8-12 \\ 7-5 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} -4 = k \cdot 2 \\ \wedge \quad 2 = k \cdot (-1) \end{array} \right.$$

$$\rightarrow k = -2$$

$$\overrightarrow{ZA'} = k \cdot \overrightarrow{ZA}$$

$$\begin{pmatrix} 12-x_z \\ 5-y_z \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0-x_z \\ 2-y_z \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 12-x_z = 2x_z \\ \wedge \quad 5-y_z = -4 + 2y_z \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 12 = 3x_z \\ \wedge \quad 9 = 3y_z \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_z = 4 \\ \wedge \quad y_z = 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow Z(4/3)$$