

Additionstheoreme

In manchen Berechnungen in der Trigonometrie müssen Terme vereinfacht werden, die den Sinus, Kosinus oder Tangens einer Summe oder Differenz von zwei Winkelmaßen enthalten.

Die so genannten "Additionstheoreme" sind Formeln, die diese Umformungen erleichtern. Sie lassen sich mit Hilfe eines Dreiecks am Einheitskreis herleiten:

Der Flächeninhalt des hier gegebenen Dreiecks OPQ lässt sich auf zwei Arten berechnen:

1) Mit den Vektoren, die das Dreieck aufspannen:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\sin \alpha & \sin \beta \end{vmatrix} FE.$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta) FE.$$

2) Mit zwei Seitenlängen und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

Setzt man die Ergebnisse gleich, erhält man:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Setzt man für β den Term $-\beta$ ein, erhält man eine weitere Formel:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Ähnliche Umformungen ergeben weitere Formeln, z. B. lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Diese vier Formeln heißen "Additionstheoreme für Sinus und Kosinus". Mit ihrer Hilfe lassen sich auch Formeln für "Sinus und Kosinus des doppelten und halben Winkelmaßes" herleiten:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

