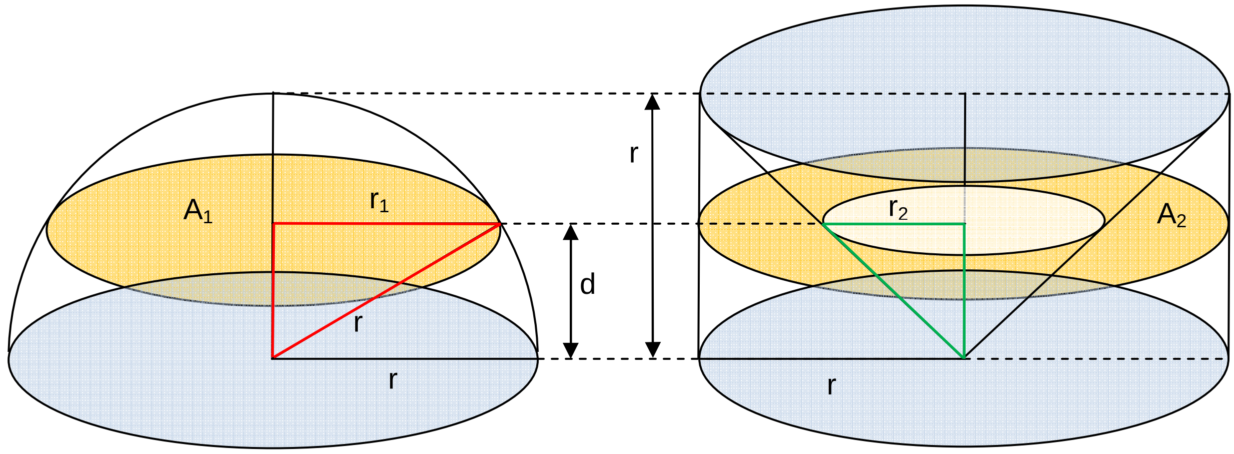
Die Kugel

Um das Volumen einer Kugel zu bestimmen, wird eine Halbkugel mit einem Zylinder verglichen, aus dem von oben ein auf der Spitze stehender Kegel "herausgeschnitten" wird. Beide Körper haben den gleichen Radius r und die gleiche Höhe r und werden im Abstand d von Ebenen parallel zur Grundfläche geschnitten.



Als Schnittflächen erhält man bei der Halbkugel Kreise und bei dem anderen Körper Kreisringe.
Die Schnittflächen A_1 und A_2 werden nun verglichen:

Halbkugel: $A_1 = \pi r_1^2$ $r_1^2 = r^2 - d^2$ (Pythagoras) → $A_1 = \pi (r^2 - d^2)$

Zylinder – Kegel: $A_2 = \pi r^2 - \pi r_2^2$ $r_2 = d$ (gleichschenkliges Dreieck) → $A_2 = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi (r^2 - d^2)$

Da $A_1 = A_2$ ist, sind die beiden Körper nach dem Satz des Cavalieri volumengleich und es gilt:

$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder – Kegel}} = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3 \rightarrow \boxed{V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Um die Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, zerlegt man die Kugel in "pyramidenähnliche" Körper, deren Spitze im Kugelmittelpunkt und deren (gekrümmte) Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel liegen.

Zerlegt man die Kugel in "unendlich viele" solche Körper, dann ist deren Höhe gleich dem Kugelradius und die Summe ihrer Grundflächen gleich der Oberfläche der Kugel (die Krümmung der dann unendlich kleinen Grundflächen spielt keine Rolle mehr).

Das Volumen der Kugel und das Volumen aller Pyramiden ist dann gleich:

$$V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Pyramide1}} + V_{\text{Pyramide2}} + V_{\text{Pyramide3}} + \ldots$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} G_1 r + \frac{1}{3} G_2 r + \frac{1}{3} G_3 r + \ldots$$

$$= \frac{1}{3} r \, (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots) = \frac{1}{3} r \cdot O_{\text{Kugel}}$$

$$\rightarrow \boxed{O_{\text{Kugel}} = 4 \pi r^2}$$