Linearfaktoren

Hat eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so kann sie in der so genannten "**Linearfaktorenzerlegung**" geschrieben werden: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Begründung: Ein Produkt von zwei Faktoren hat genau dann den Wert 0 hat, wenn mindestens ein Faktor den Wert 0 hat. Damit gilt: $(x - x_1)(x - x_2) = 0 \rightarrow x - x_1 = 0 \;\vee\; x - x_2 = 0$; $x = x_1 \;\vee\; x = x_2$; $L = \{ x_1 ; x_2 \}$

Der Satz des Vieta

Multipliziert man die Gleichung $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ aus, so erhält man folgenden Zusammenhang:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$x^2 - x \cdot x_2 - x \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$x^2 + \underbrace{[-(x_1 + x_2)]}_{p}\, x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{q} = 0$$

Damit gilt:

Hat eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$ ("**Satz des Vieta**")

Für viele Werte von p und q kann man die Gleichung dann nur durch "Anschauen und Kopfrechnen" lösen.

Beispiele zur Anwendung:

1) Bestimme die Lösungen:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow -p = x_1 + x_2 = 5$ und $q = x_1 \cdot x_2 = 6 \rightarrow L = \{ 2 ; 3 \}$

$x^2 + x - 20 = 0 \rightarrow -p = x_1 + x_2 = -1$ und $q = x_1 \cdot x_2 = -20 \rightarrow L = \{ -5 ; 4 \}$

2) Mit Hilfe des Satzes von Vieta bzw. der Linearfaktoren kann man aus den Lösungen eine zugehörige quadratische Gleichung ermitteln:

$L = \{ 4 ; -6 \} \rightarrow -p = 4 + (-6) = -2$; $p = 2$ und $q = 4 \cdot (-6) = -24 \rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$

oder: $(x - 4)(x + 6) = 0$; $x^2 + 6x - 4x - 24 = 0$; $x^2 + 2x - 24 = 0$

3) Ebenso kann man aus den Nullstellen einer quadratischen Funktion eine bzw. mehrere Funktionsgleichungen mit genau diesen Nullstellen bestimmen:

Aufgabe: Gib die Gleichungen von 3 quadratischen Funktionen mit den Nullstellen $x = -4$ und $x = 2{,}5$ an.

$(x + 4)(x - 2{,}5) = 0$; $x^2 - 2{,}5x + 4x - 10 = 0$; $x^2 + 1{,}5x - 10 = 0 \rightarrow f_1$: $y = x^2 + 1{,}5x - 10$

Die Gleichung $x^2 + 1{,}5x - 10 = 0$ kann mit beliebigen Faktoren $\neq 0$ multipliziert werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert! Damit erhält man z. B. die Funktionen f_2: $y = 2x^2 + 3x - 20$ und f_3: $y = -0{,}5x^2 - 0{,}75x + 5$, die beide auch die Nullstellen $x = -4$ und $x = 2{,}5$ haben!