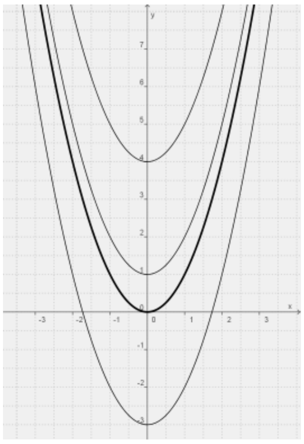
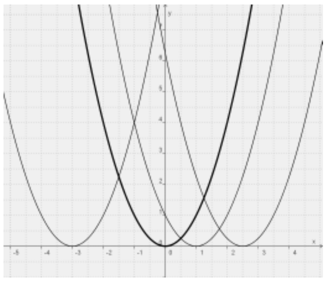
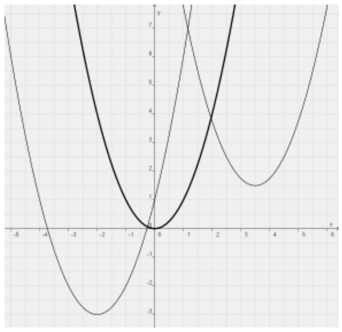
Verschobene Normalparabeln – Scheitelform und Normalform

Die Normalparabel als Graph der quadratischen Funktion f: $y = x^2$ kann entlang der y-Achse, entlang der x-Achse oder in beliebige Richtung verschoben werden. Dabei entstehen quadratische Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

Graph	Normalparabel, um y_S Einheiten in Richtung der y-Achse verschoben	Normalparabel, um x_S Einheiten in Richtung der x-Achse verschoben	Normalparabel, beide Verschiebungen kombiniert
Verschiebungs-vektor	$\begin{pmatrix} 0 \\ y_S \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_S \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$
Scheitelpunkt	**S(0 / y_S)**	**S(x_S / 0)**	**S(x_S / y_S)**
Gleichung in Scheitelform	$\mathbf{y = x^2 + y_S}$	$\mathbf{y = (x - x_S)^2}$	$\mathbf{y = (x - x_S)^2 + y_S}$
Symmetrieachse	**x = 0**	$\mathbf{x = x_S}$	$\mathbf{x = x_S}$
Wertemenge	**W = { y | y > y_S }, denn y_S ist der kleinste Funktionswert**	**W = { y | y > 0 }, denn 0 ist der kleinste Funktionswert**	**W = { y | y > y_S }, denn y_S ist der kleinste Funktionswert**
Beispiele			

Die Gleichung $\mathbf{y = (x - x_S)^2 + y_S}$ heißt **Scheitelform der Parabelgleichung.**

Beachte: Auch die Gleichungen $y = x^2 + y_S$ und $y = (x - x_S)^2$ sind in der Scheitelform! Für $x_S = 0$ gilt $y = (x - 0)^2 + y_S \rightarrow y = x^2 + y_S$ und für $y_S = 0$ gilt $y = (x - x_S)^2 + 0 \rightarrow y = (x - x_S)^2$

Multipliziert man die Scheitelform aus und fasst zusammen, erhält man eine andere Form der Parabelgleichung:

Die Gleichung $\mathbf{y = x^2 + px + q}$ heißt **Normalform der Parabelgleichung.**

Um die Normalform wieder auf Scheitelform zu bringen, verwendet man die **quadratische Ergänzung**!

Beispiel:

Scheitelform: $\mathbf{y = (x - 3)^2 + 4}$

↓ Ausmultiplizieren und Zusammen-fassen: $y = x^2 - 6x + 9 + 4$

Normalform: $\mathbf{y = x^2 - 6x + 13}$

↓ Quadratische Ergänzung: $y = x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 13$

Scheitelform: $\mathbf{y = (x - 3)^2 + 4}$