

Verschobene Normalparabeln

Verschiebt man die "Normalparabel in Ursprungslage" mit beliebigen Vektoren, erhält man "Normalparabeln in beliebiger Lage". Auch sie sind Graphen quadratischer Funktionen.

Ihre Gleichungen kann man mit Hilfe der Vektorrechnung bestimmen. Wir verschieben die Normalparabel

$p: y = x^2$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ und ermitteln die Gleichung der Bildparabel p' mit dem Parameterverfahren:

Bei der Verschiebung wird jeder Punkt der Parabel verschoben. Wir zeichnen den Verschiebungsvektor am Scheitelpunkt $S(0/0)$ und an einem beliebigen anderen Parabelpunkt $P(x/x^2)$ ein.

Für die Koordinaten des Scheitels S' der Bildparabel gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x' = 0 + x_S = x_S \\ \text{(II)} \quad & \wedge \quad y' = 0 + y_S = y_S \end{aligned}$$

Für die Koordinaten aller Bildpunkte P' gilt dann:

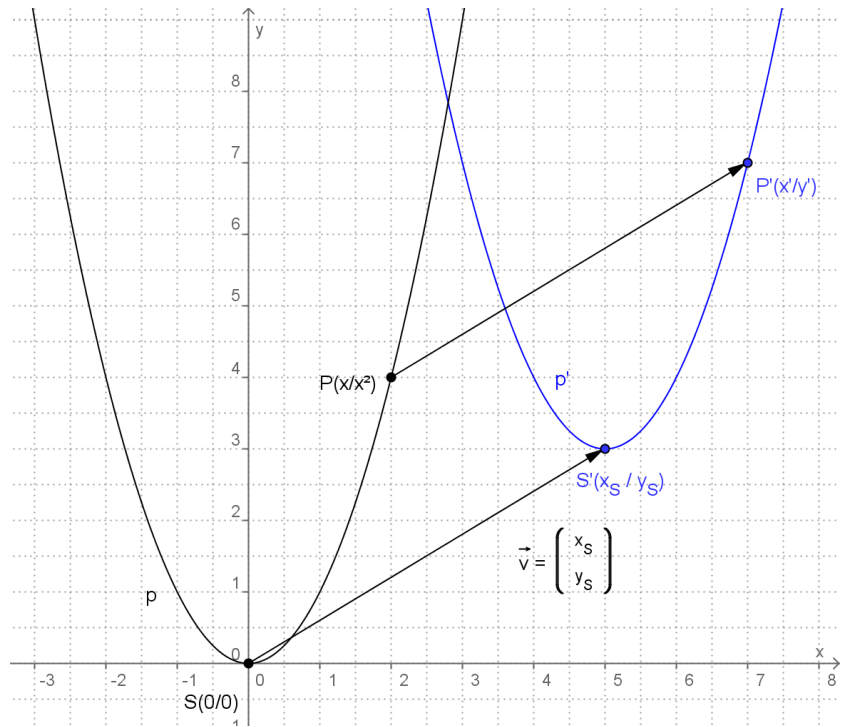
$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x' = x + x_S \\ \text{(II)} \quad & \wedge \quad y' = x^2 + y_S \end{aligned}$$

Die Variable x wird eliminiert, indem wir die Gleichung (I) nach x auflösen und den entstehenden Term in die Gleichung (II) einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x' - x_S = x \\ \text{(II)} \quad & y' = (x' - x_S)^2 + y_S \end{aligned}$$

In der Gleichung (II) steht nun der Zusammenhang zwischen x' und y' , damit ist diese Gleichung die gesuchte Gleichung der Bildparabel. Verwendet man die Gleichung (II) für sich allein, kann statt x' und y' wieder x und y verwendet werden.

$$\rightarrow \quad p': y = (x - x_S)^2 + y_S$$



Scheitelform der Parabelgleichung

- Die Gleichung $y = (x - x_S)^2 + y_S$ heißt **Scheitelform** der Parabelgleichung oder kurz **Scheitelgleichung**.
- Sie beschreibt eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem **Scheitelpunkt** $S(x_S/y_S)$.
- Die **Symmetrieachse** der Parabel hat die Gleichung $x = x_S$, die y -Koordinate y_S des Scheitels ist der kleinste Funktionswert.
- Die zugehörige quadratische Funktion hat die **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}$ und die **Wertemenge** $W = \{ y \mid y \geq y_S \}$.
- Sonderfälle: Verschiebt man die Normalparabel $y = x^2$ nur entlang der y -Achse bzw. nur entlang der x -Achse, entstehen andere Formen der Scheitelgleichung, die aber ebenfalls so genannt werden:

$$\text{Verschiebung entlang der } y\text{-Achse: } v = \begin{pmatrix} 0 \\ y_S \end{pmatrix} \rightarrow y = (x - 0)^2 + y_S \rightarrow y = x^2 + y_S$$

$$\text{Verschiebung entlang der } x\text{-Achse: } v = \begin{pmatrix} x_S \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = (x - x_S)^2 + 0 \rightarrow y = (x - x_S)^2$$

Normalform der Parabelgleichung

Multipliziert man die Scheitelform aus und fasst zusammen, erhält man eine andere Form der Parabelgleichung. Sie heißt **Normalform der Parabelgleichung** und hat die Form $y = x^2 + px + q$.

Um die Normalform wieder auf Scheitelform zu bringen, verwendet man die **quadratische Ergänzung!**

Beispiel:

Scheitelform:	$y = (x - 3)^2 + 4$
↓ Ausmultiplizieren und Zusammen- fassen	$y = x^2 - 6x + 9 + 4$
Normalform:	$y = x^2 - 6x + 13$
↓ Quadratische Ergänzung	$y = x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 13$
Scheitelform:	$y = (x - 3)^2 + 4$

Führt man die quadratische Ergänzung für die Gleichung $y = x^2 + px + q$ allgemein durch, erhält man für die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel die Terme

$$S\left(-\frac{p}{2} / -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

Auch damit können die Koordinaten des Scheitelpunktes berechnet werden.