Potenzen mit rationalen Exponenten

1) Erweiterung des Wurzelbegriffs

Aufgabe: Berechne die fehlenden Koordinaten der Punkte P(4/y), Q(x/8) und R(x/12) der Funktion f: $y = x^3$.

P: $y = 4^3 = 64$ Q: $x^3 = 8$, $x = 2$ R: $x^3 = 12$, $x = ?$

Da auch R ein Punkt der Funktion f ist, muss es eine Lösung der Gleichung $x^3 = 12$ geben: es ist die Zahl x, die "dreimal mit sich selbst multipliziert" den Wert 12 ergibt.

Entsprechend zu den Quadratwurzeln der 9. Klasse bezeichnen wir diese Zahl als "**dritte Wurzel**" von 12 oder "**Kubikwurzel**" von 12.

$$\boxed{x^3 = 12 \iff x = \sqrt[3]{12}}$$

Überträgt man diese Bezeichnungen auf andere Exponenten, so gilt allgemein:

Die nicht negative Lösung x der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in R_0^+$ und $n \in N \setminus \{1\}$ heißt n-te Wurzel von a:

$$x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$$

2) Potenzschreibweise

Wurzeln können als Potenzen geschrieben werden:

$$\sqrt{a}^{\,2} = a \quad \text{und} \quad (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a \quad \rightarrow \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a}^{\,3} = a \quad \text{und} \quad (a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = a^1 = a \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \qquad \text{usw.}$$

Damit gilt allgemein:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

3) Auch **Potenzen der Form** $a^{\frac{m}{n}}$ lassen sich für $a \in R_0^+$ und $n \neq 0$ berechnen.

Sie heißen **n-te Wurzel aus a^m** :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Begründung:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \,\ldots\ldots\ldots \cdot \sqrt[n]{a}$$
$$= \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot a}$$
$$= \sqrt[n]{a^m}$$