Das Determinantenverfahren

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich allgemein mit Variablen als Platzhalter für Zahlen lösen. Hierzu verwendet man das Additionsverfahren mit vorheriger Multplikation. Man erhält dann Lösungsterme für x und y, in die man die Zahlen jedes beliebigen Gleichungssystems einsetzen und die Lösung bestimmen kann.

Die Lösungsterme lassen sich aber nur sehr schwer merken. Zur Vereinfachung hat man daher das so genannte "Determinantenverfahren" entwickelt.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \text{(II)} \wedge & a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}$$

....

$$\rightarrow \quad x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \; ; \; y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Definition: Eine Anordnung von 4 Zahlen in der Form $\begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix}$ heißt 2x2 - **Determinante**. Ihr Wert wird mit folgender Formel berechnet: $\begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix} = e \cdot h - f \cdot g$ ("Differenz der Diagonalprodukte")

Mit Hilfe von Determinanten kann man lineare Gleichungssysteme folgendermaßen lösen:

1. Beide Gleichungen werden auf folgende Form gebracht:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \text{(II)} \wedge & a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}$$

2. Die 6 Koeffizienten werden "herausgelöst" (auf Minuszeichen der Koeffizienten achten!) und in der gleichen Anordnung aufgeschrieben, die erste Spalte wird hinten nochmals angehängt:

   Eine solche Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten heißt "Matrix"; hier spricht man von der "Koeffizientenmatrix" des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{array}$$

3. Aus Spalte 1 und 2 bildet man die **"Nennerdeterminante"** und berechnet sie:

$$D_N = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

   Aus Spalte 2 und 3 bildet man die **"Zählerdeterminante für x"** und berechnet sie:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1$$

   Aus Spalte 3 und 4 bildet man die **"Zählerdeterminante für y"** und berechnet sie:

$$D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1$$

4. Das Gleichungssystem hat dann **für $D_N \neq 0$ genau eine Lösung.**

   ("Cramersche Regel")

   Zeichnet man die Graphen der beiden Gleichungen, erhält man zwei sich schneidende Geraden.

   Für $D_N \neq 0$ gilt:

$$L = \left\{ \left(\frac{D_x}{D_N} \middle| \frac{D_y}{D_N} \right) \right\}$$

5. Für $\mathbf{D_N = 0 \wedge D_x \neq 0}$ hat das Gleichungssystem **keine Lösung**. Die Graphen der beiden Gleichungen sind dann zwei parallele Geraden.

   Für $D_N = 0 \wedge D_x \neq 0$ gilt:

$$L = \emptyset$$

   Für $\mathbf{D_N = 0 \wedge D_x = 0 \wedge D_y = 0}$ hat das Gleichungssystem **unendlich viele Lösungen**. Die beiden Gleichungen stellen dann ein- und dieselbe Gerade dar.

   Für $D_N = 0 \wedge D_x = 0 \wedge D_y = 0$ gilt:

$$L = \{(x/y) \mid a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$$

   bzw.

$$L = \{(x/y) \mid a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\}$$